



KINEMATYKA I DYNAMIKA CIAŁA STAŁEGO

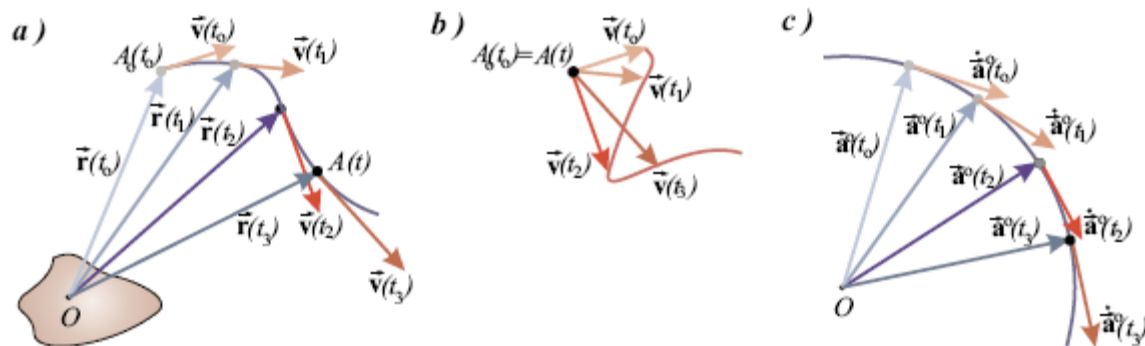
dr inż. Janusz Zachwieja

wykład opracowany na podstawie literatury

Funkcje wektorowe

Jeśli wektor $\vec{a}$ jest określony dla parametru t (t należy do przedziału $t \in (0, t_k)$), to $\vec{a}(t)$ nazywamy funkcją wektorową skalarnego parametru t w przedziale $(0, t_k)$.

Hodografem wektora zależnego od czasu nazywa się linię wyznaczoną przez miejsca geometryczne końca tego wektora w przypadku, gdy początek wektora w jego kolejnych położeniach zostanie umieszczony w jednym – wspólnym dla wszystkich położen – punkcie, a wektory zostaną przesunięte równolegle.



Rys.1. Przykładowe hodografy wektorów:

a) wektora położenia punktu $(\vec{a} = \vec{r})$

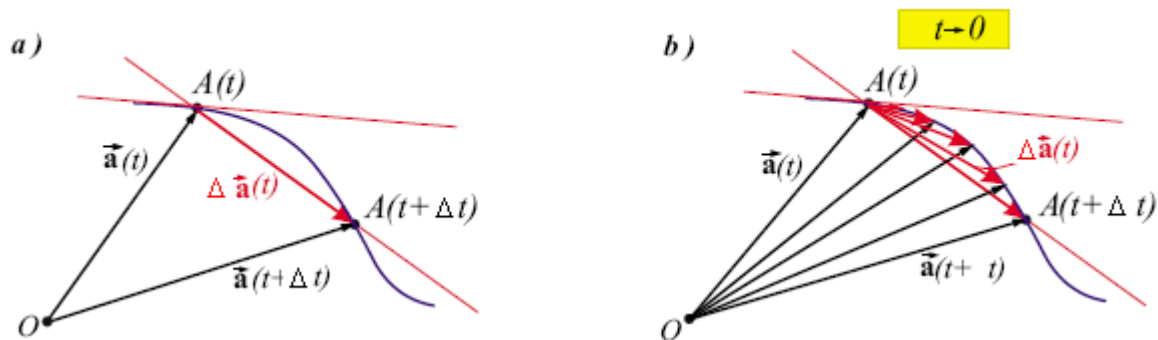
b) wektora prędkości punktu $(\vec{a} = \vec{v})$

c) wektora jednostkowego poruszającego się w płaszczyźnie $\vec{a} = \vec{a}^0$.

Pochodna funkcji wektorowej

Pochodną funkcji wektorowej $\vec{a}(t)$ określa się jako granicę

$$\frac{d\vec{a}(t)}{dt} \equiv \dot{\vec{a}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{a}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{a}(t + \Delta t) - \vec{a}(t)}{\Delta t} . \quad (1)$$



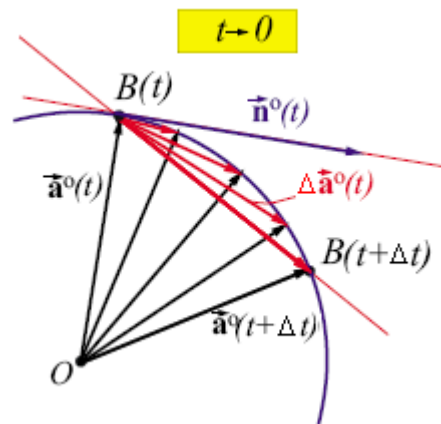
Rys.2. Przyrost wektora $\vec{a}$ w czasie Δt

Jak wynika z rysunku 2b kierunek wektora przyrostu $\Delta \vec{a}(t)$, w przypadku gdy $t \rightarrow 0$, dąży do kierunku stycznej do krzywej utworzonej przez kolejne położenia końca wektora $\vec{a}(t)$ – to jest do hodografu tego wektora .

Pochodna wektora jednostkowego

Pochodna wektora jednostkowego $\vec{a}^0(t)$ jest zdefiniowana jako:

$$\frac{d\vec{a}^0(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{a}^0(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{a}^0(t + \Delta t) - \vec{a}^0(t)}{\Delta t} \quad (2)$$



Rys.3. Przyrost wektora jednostkowego $\vec{a}^0(t)$ w czasie Δt

Ponieważ: $\vec{a}^o \cdot \vec{a}^o = 1$ to różniczkując to wyrażenie otrzymujemy:

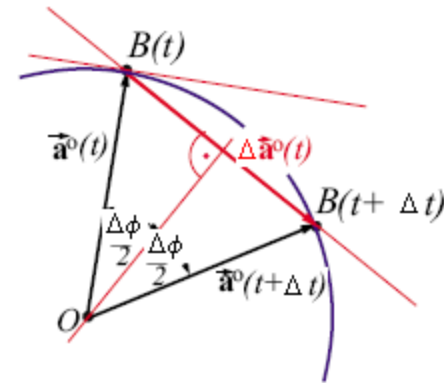
$$\frac{d\vec{a}^o(t)}{dt} \cdot \vec{a}^o + \vec{a}^o \cdot \frac{d\vec{a}^o(t)}{dt} = 0, \quad \text{lub} \quad \frac{d\vec{a}^o(t)}{dt} \cdot \vec{a}^o = 0. \quad (3)$$

Zerowa wartość iloczynu skalarnego dwóch wektorów świadczy o tym, że wektory $\frac{d\vec{a}^o}{dt}$ i $\vec{a}^o(t)$ są do siebie prostopadłe. Pochodna wektora jednostkowego $\vec{a}^o(t)$ jest więc wektorem o kierunku $\vec{n}^o(t)$, a jej wartość jest określona zależnością

$$|\dot{\vec{a}}^o| = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|\Delta \vec{a}^o(t)|}{\Delta t}.$$

Długość wektora $|\Delta \vec{a}^o(t)|$ można przedstawić jako:

$$|\Delta \vec{a}^o(t)| = 2a^o \sin \frac{\Delta \varphi}{2}, \quad \text{gdzie: } |\vec{a}^o| = a^o$$



Dokonujemy przekształcenia:

$$|\Delta \vec{a}^o(t)| = 2 \sin \frac{\Delta \varphi}{2} \frac{\Delta \varphi}{\Delta \varphi} = \frac{\sin \frac{\Delta \varphi}{2}}{\frac{\Delta \varphi}{2}} \Delta \varphi. \quad (4)$$

Pochodna wektora jednostkowego jest zatem określona w sposób następujący:

$$|\dot{\vec{a}}^o| = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\Delta \varphi}{2}}{\frac{\Delta \varphi}{2}} \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\Delta \varphi}{2}}{\frac{\Delta \varphi}{2}} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta t}. \quad (5)$$



Dalej $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\Delta \varphi}{2}}{\frac{\Delta \varphi}{2}} = \lim_{\Delta \varphi \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\Delta \varphi}{2}}{\frac{\Delta \varphi}{2}} = 1$, gdyż dla $\Delta t \rightarrow 0$ również $\Delta \varphi \rightarrow 0$

Wobec powyższego

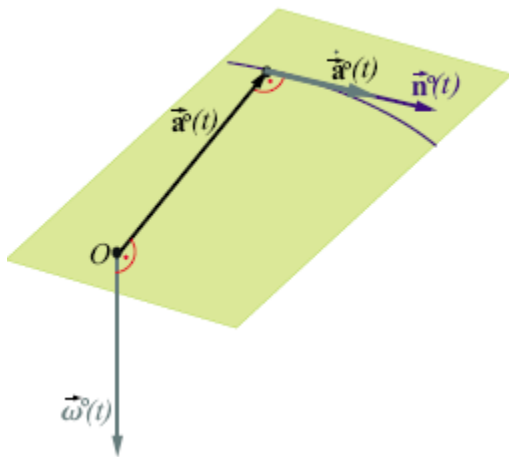
$$|\dot{\vec{a}}^o| = \omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} \quad (6)$$

Wielkość tę określamy jako prędkość kątową. Prędkość kątowa jest miarą zmiany kąta obrotu wektora, prostej lub ciała sztywnego. Pochodna wektora jednostkowego $\vec{a}^o$ jest więc wektorem o kierunku określonym wersorem $\vec{n}^o$ i wartości równej ω , to znaczy

$$\dot{\vec{a}}^o = \omega \vec{n}^o \quad (7)$$

Pomiędzy wektorami jednostkowymi $\vec{\omega}^o(t), \vec{a}^o(t), \vec{n}^o(t)$ zachodzi związek

$$\vec{n}^o = \vec{\omega}^o \times \vec{a}^o \quad \dot{\vec{a}}^o = \vec{\omega} \times \vec{a}^o \quad (8)$$



Rys.5. Wzajemne położenie wektorów

Pochodna wektora $\vec{a}(t)$ i jej składowe

Przedstawiając wektor $\vec{a}(t)$ jako

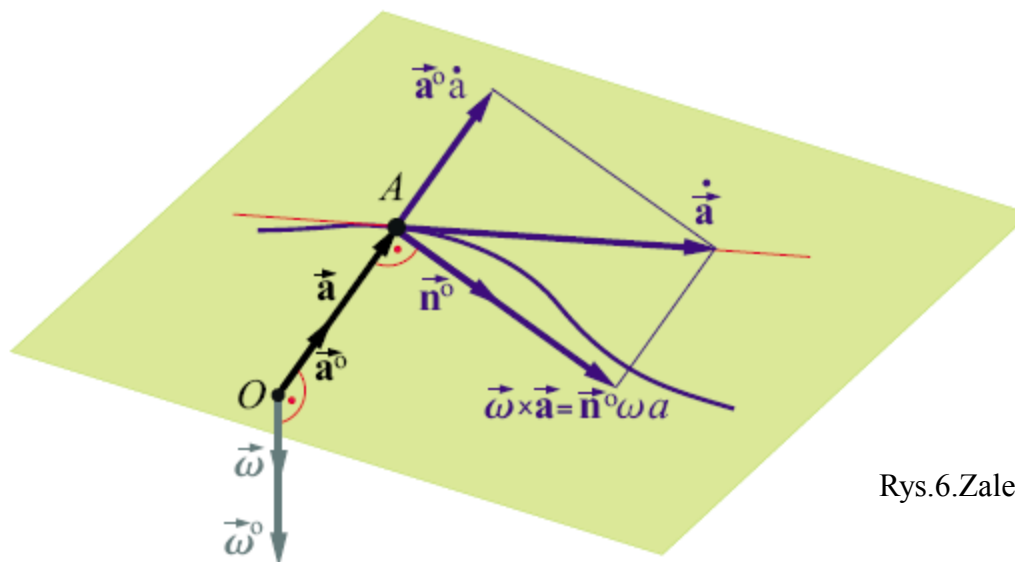
$$\vec{a} = a \vec{a}^o \quad a = |\vec{a}| \quad (9)$$

Różniczkujemy go względem czasu

$$\frac{d\vec{a}(t)}{dt} = \frac{da(t)}{dt} \vec{a}^o + a \frac{d\vec{a}^o(t)}{dt} \quad (10)$$

Ostatecznie:

$$\dot{\vec{a}} = \dot{a} \vec{a}^o + \omega a \vec{n}^o \quad \text{lub} \quad \dot{\vec{a}} = \dot{a} \vec{a}^o + \vec{\omega} \times \vec{a} \quad (11)$$



Rys.6. Zależności między wektorami

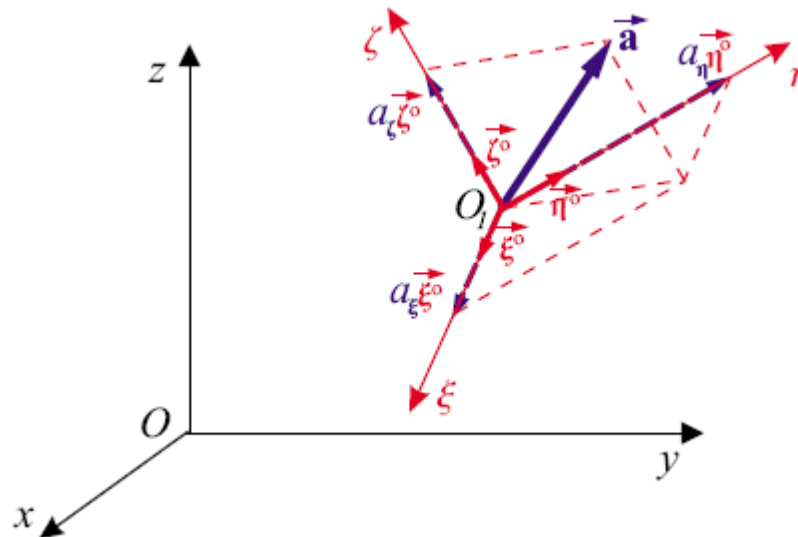
Pochodna lokalna i absolutna wektora $\vec{a}(t)$

Wektor $\vec{a}(t)$ można przedstawić za pomocą składowych o kierunkach osi xyz – oznaczających nieruchomy układ współrzędnych – jako

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k} \quad (12)$$

a jego pochodną w postaci

$$\dot{\vec{a}} = \dot{a}_x \vec{i} + \dot{a}_y \vec{j} + \dot{a}_z \vec{k} \quad (13)$$



Rys. 7. Składowe wektora $\vec{a}(t)$ w ruchomym układzie odniesienia



Przedstawiając wektor $\vec{a}(t)$ za pomocą składowych określonych w ruchomym układzie odniesienia $\xi\eta\zeta$ jako

$$\vec{a} = a_\xi \vec{\xi}^o + a_\eta \vec{\eta}^o + a_\zeta \vec{\zeta}^o \quad (14)$$

można określić jego pochodną, różniczkując wyrażenie (14). Ponieważ wektory jednostkowe $\vec{\xi}^o, \vec{\eta}^o, \vec{\zeta}^o$ poruszają się razem z układem $\xi\eta\zeta$, to ich pochodne są różne od zera. Zatem

$$\dot{\vec{a}} = \dot{a}_\xi \vec{\xi}^o + a_\xi \dot{\vec{\xi}}^o + \dot{a}_\eta \vec{\eta}^o + a_\eta \dot{\vec{\eta}}^o + \dot{a}_\zeta \vec{\zeta}^o + a_\zeta \dot{\vec{\zeta}}^o \quad (15)$$

Pochodne wektorów jednostkowych – zgodnie z (8) – są określone jako:

$$\dot{\vec{\xi}}^o = \vec{\omega} \times \vec{\xi}^o, \quad \dot{\vec{\eta}}^o = \vec{\omega} \times \vec{\eta}^o, \quad \dot{\vec{\zeta}}^o = \vec{\omega} \times \vec{\zeta}^o \quad (16)$$

przy czym $\vec{\omega}$ oznacza wektor prędkości kątowej układu $\xi\eta\zeta$ względem układu xyz.

Uwzględniając (16) otrzymujemy

$$\dot{\vec{a}} = \dot{a}_\xi \vec{\xi}^o + \dot{a}_\eta \vec{\eta}^o + \dot{a}_\zeta \vec{\zeta}^o + \vec{\omega} \times (a_\xi \vec{\xi}^o + a_\eta \vec{\eta}^o + a_\zeta \vec{\zeta}^o) \quad (17)$$

Oznaczając:

$$\frac{\hat{d}\vec{a}}{dt} = \dot{a}_\xi \vec{\xi}^o + \dot{a}_\eta \vec{\eta}^o + \dot{a}_\zeta \vec{\zeta}^o \quad (18)$$

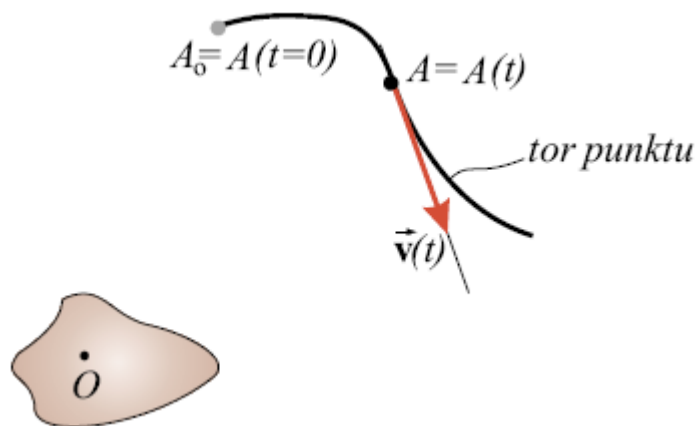
pochodną wektora $\vec{a}(t)$ można zapisać jako

$$\frac{d\vec{a}}{dt} = \frac{\hat{d}\vec{a}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{a} \quad (19)$$

Pochodna $\frac{d\vec{a}}{dt} \equiv \dot{\vec{a}}$ jest nazywana pochodną absolutną, natomiast $\frac{\hat{d}\vec{a}}{dt}$ nazywa się pochodną lokalną lub pochodną względną. Pochodna lokalna (względna) opisuje zmiany wektora $\vec{a}(t)$ względem ruchomego układu odniesienia $\xi\eta\zeta$. Pochodna absolutna opisuje zmiany tego wektora względem nieruchomego układu xyz.

Kinematyka punktu

Kinematyka punktu dotyczy ruchu, czyli zmiany położenia punktu w czasie.



Rys.8. Ruch punktu względem ciała – położenie początkowe (A_0) i dowolne położenie punktu (A) oraz tor i prędkość $\vec{v}$ punktu

Podstawowe pojęcia:

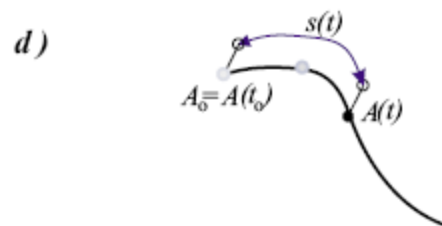
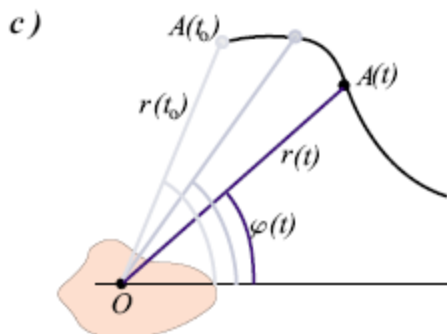
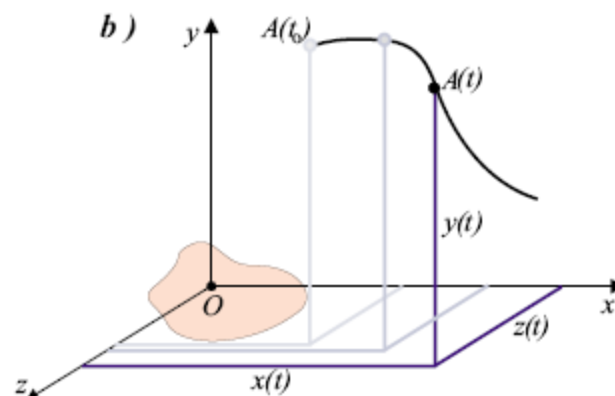
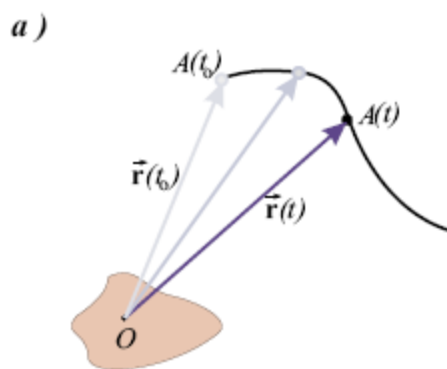
Torem punktu nazywa się krzywą, którą wyznaczają kolejne położenia punktu w czasie ruchu.
Położeniem początkowym nazywa się położenie punktu w chwili $t = 0$ ($A_0 = A(0)$).

Jeśli położenie punktu jest znaną funkcją czasu i tor punktu jest określony, to można wyznaczyć prędkość i przyspieszenie punktu.

Położenie punktu

Położenie punktu może być określone na kilka sposobów:

- za pomocą wektora określającego położenie punktu względem układu odniesienia (wektorowy opis ruchu) – Rys.9a,
- za pomocą współrzędnych punktu w wybranym układzie odniesienia, np. w układzie prostokątnym – Rys.9b, albo w układzie biegunowym – Rys.9c lub w innych układach współrzędnych (sferycznym, walcowym, itd.),
- poprzez drogie przebyta wzdłuż toru (opis ruchu punktu po torze) – Rys.9d.



Rys.9. Sposoby określania położenia i ruchu punktu: a) wektorowy, b) za pomocą współrzędnych prostokątnych, c) przy użyciu współrzędnych biegunowych, d) po torze

Równania ruchu punktu

Równaniami ruchu punktu nazywa się funkcje (zależne od czasu) określające położenie poruszającego się punktu. W zależności od sposobu określenia położenia mamy do czynienia z:

- wektorowymi równaniami ruchu,
- równaniami ruchu w określonym układzie współrzędnych (prostokątnych, sferycznych, walcowych, biegunowych itd.),
- równaniami ruchu po torze.

Wektorowe równanie ruchu punktu jest określone za pomocą funkcji wektorowej

$$\vec{r} = \vec{r}(t) \quad (20)$$

Równania ruchu punktu w wybranym układzie odniesienia są zadane poprzez funkcje określające położenie punktu w przyjętym do opisu układzie współrzędnych. Na przykład **równania ruchu we współrzędnych prostokątnych** są określone, jeśli znane są funkcje $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ opisujące położenie punktu względem układu xyz:

$$\begin{cases} x = x(t) , \\ y = y(t) , \\ z = z(t) . \end{cases} \quad (21)$$

Równania ruchu punktu we współrzędnych biegunowych. W tym przypadku ruch jest określony za pomocą funkcji:

$$\begin{cases} r = r(t) , \\ \varphi = \varphi(t) . \end{cases} \quad (22)$$

Równanie ruchu punktu po torze ma postać

$$\begin{cases} s = s(t) , \\ \rho = \rho(t) . \end{cases} \quad (23)$$

przy czym s oznacza przebytą drogę – mierzona wzdłuż toru.

Dla pełnego opisu ruchu (dla wyznaczenia przyspieszenia) wymagana jest jeszcze znajomość promienia krzywizny toru (ρ) (albo informacje niezbędne do wyznaczenia promienia krzywizny toru – np. równanie toru).

PRZYKŁAD 1

Ruch punktu poruszającego się z prędkością $\omega = bt$, po okręgu o promieniu a , można przedstawić na kilka sposobów:

a) za pomocą wektorowego równania ruchu

$$\vec{r} = a \cos\left(\frac{1}{2}bt^2\right) \vec{i} + a \sin\left(\frac{1}{2}bt^2\right) \vec{j} + 0 \vec{k} , \quad (24)$$

b) za pomocą układu współrzędnych prostokątnych

$$\begin{cases} x = a \cos\left(\frac{1}{2}bt^2\right) , \\ y = a \sin\left(\frac{1}{2}bt^2\right) , \\ z = 0 , \end{cases} \quad (25)$$

c) za pomocą układu współrzędnych biegunowych

$$\begin{cases} r = a , \\ \varphi = \frac{1}{2}bt^2 , \end{cases} \quad (26)$$

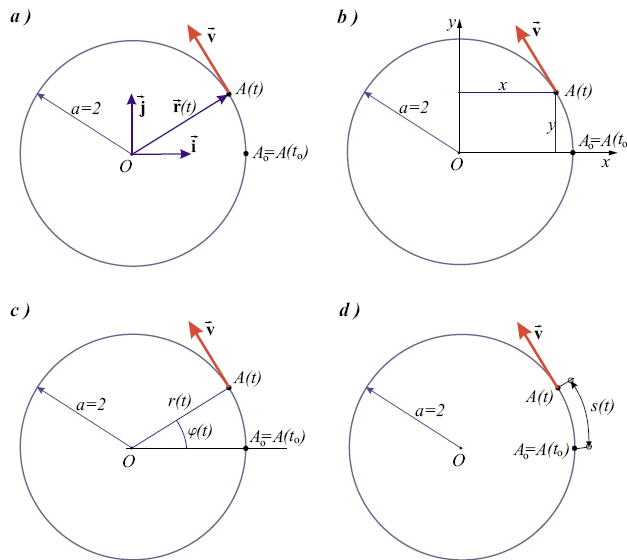
d) używając równania ruchu po torze

$$\begin{cases} s = \frac{1}{2} a b t^2, \\ \rho = a. \end{cases} \quad (27)$$

Równania toru punktu

Równaniami toru nazywa się równania (lub równanie) krzywej, po której porusza się punkt. Można je wyznaczyć na podstawie równań ruchu poprzez wyeliminowanie z tych równań parametru t (czasu). W przypadku, gdy ruch jest opisany za pomocą współrzędnych prostokątnych równania toru przyjmują postać:

$$\begin{cases} f_1(x, y) = 0, \\ f_2(y, z) = 0 \end{cases} \quad (28)$$



Rys.10. Sposoby opisu ruchu punktu po okręgu

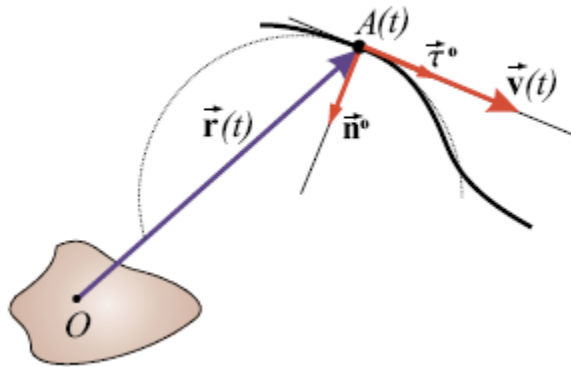
Prędkość i przyspieszenie punktu

Prędkość punktu określa zmiany położenia (wektora położenia) punktu w czasie.

Przyspieszenie określa zmiany prędkości (wektora prędkości) w czasie.

Sposób opisu położenia punktu decyduje o sposobie wyznaczania jego prędkości i przyspieszenia.

Wyznaczanie prędkości i przyspieszenia przy wektorowym opisie położenia punktu



Rys.11. Określenie prędkości punktu przy opisie położenia za pomocą promienia wektora

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}} \quad (29)$$

Prędkość – zgodnie z definicją pochodnej $\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}$

– oznacza przyrost wektora położenia w przedziale czasu (taki przedział czasu jest nazywany infimezmalnym). Prędkość punktu jest wektorem stycznym do toru punktu).



Wektor przyspieszenia $\vec{p}$ punktu jest zdefiniowany jako pochodna względem czasu wektora prędkości punktu $\vec{v}$

$$\vec{p} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\vec{v}} \quad (30)$$

Przyspieszenie punktu określa przyrost wektora prędkości w czasie $\vec{p} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}$

Składowe styczne i normalne przyspieszenia:

Przedstawiamy wektor prędkości punktu w postaci:

$$\vec{v} = v \vec{\tau}^o \quad (31)$$

przy czym $\vec{\tau}^o$ jest wersorem osi τ , a następnie zróżniczkujemy wyrażoną w ten sposób prędkość. Przyspieszenie – czyli pochodna wektora prędkości – przyjmuje wówczas formę

$$\vec{p} = \dot{\vec{v}} = \frac{dv}{dt} \vec{\tau}^o + v \frac{d\vec{\tau}^o}{dt} \quad (32)$$

Występującą w drugim składniku pochodną wektora jednostkowego $\vec{\tau}^o$ można przedstawić jako

$$\frac{d\vec{\tau}^o}{dt} = \dot{\vec{\tau}}^o = \omega \vec{n}^o \quad (33)$$

Dokonujemy stosownych przekształceń mając na uwadze, że $\Delta\varphi = \frac{\Delta s}{\rho}$

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\rho \Delta t} = \frac{1}{\rho} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{1}{\rho} v \quad (34)$$

Tym samym

$$\frac{d\vec{\tau}^o}{dt} = \frac{v}{\rho} \vec{n}^o \quad (35)$$



Rys.12. Składowa styczna i normalna wektora przyspieszenia

Uwzględnienie (32) daje

$$\vec{p} = \frac{dv}{dt} \vec{\tau}^o + \frac{v^2}{\rho} \vec{n}^o \quad (36)$$

Poszczególne człony w (36) wyznaczają składowe styczną i normalną przyspieszenia

$$p_\tau = \frac{dv}{dt}, \quad p_n = \frac{v^2}{\rho}, \quad \text{oraz} \quad \vec{p} = p_\tau \vec{\tau}^o + p_n \vec{n}^o \quad (37)$$

PRZYKŁAD 2

Ruch punktu poruszającego się po okręgu o promieniu a jest opisany za pomocą wektorowego równania ruchu:

$$\vec{r} = a \cos\left(\frac{1}{2}bt^2\right) \vec{i} + a \sin\left(\frac{1}{2}bt^2\right) \vec{j} + 0 \vec{k} \quad (38)$$

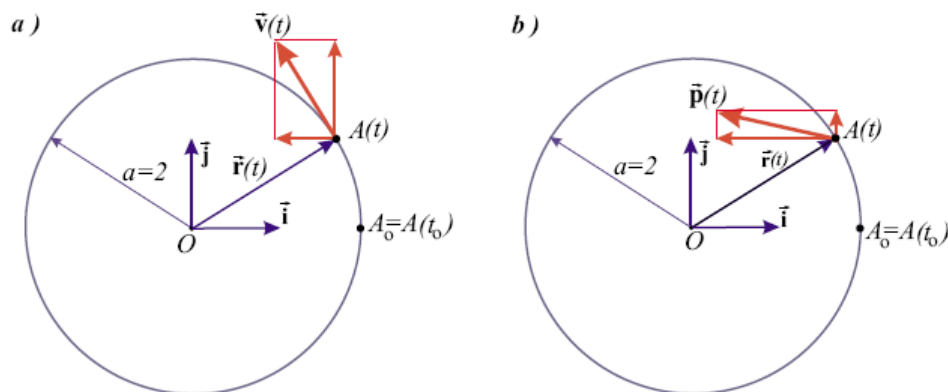
przy czym $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ są wektorami jednostkowymi związanymi z nieruchomym układem odniesienia. Wyznaczyć prędkość i przyspieszenie tego punktu.

Jeśli znane jest równanie ruchu punktu w postaci wektorowej, to prędkość wyznacza się z zależności

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt} \left[a \cos\left(\frac{1}{2}bt^2\right) \vec{i} + a \sin\left(\frac{1}{2}bt^2\right) \vec{j} + 0 \vec{k} \right] \quad (39)$$

oraz

$$\vec{v} = \left[-a \sin\left(\frac{1}{2}bt^2\right) \right] \cdot \frac{1}{2}b \cdot 2t \vec{i} + \left[a \cos\left(\frac{1}{2}bt^2\right) \right] \cdot \frac{1}{2}b \cdot 2t \vec{j} \quad (40)$$



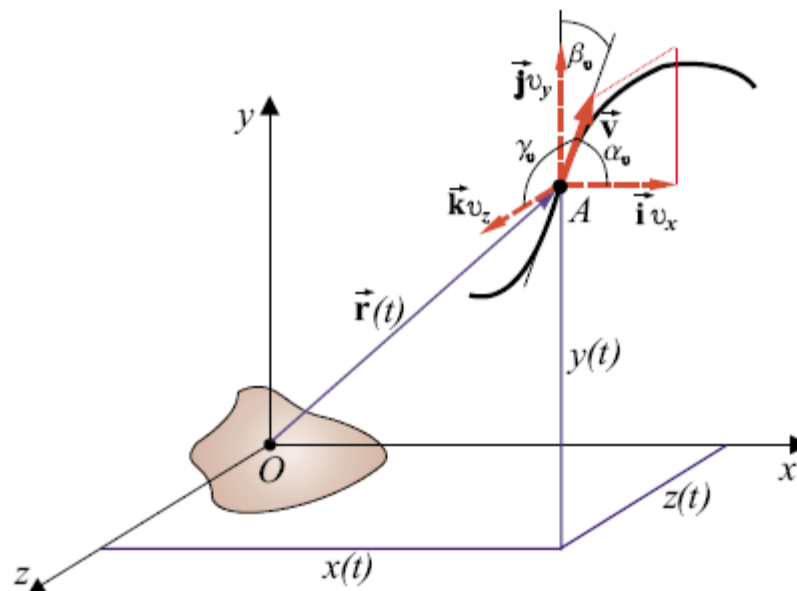
Rys.13. Wektory prędkości i przyspieszenia oraz ich składowe

Po zrózniczkowaniu wektora prędkości otrzymuje się wektor przyspieszenia w postaci

$$\begin{aligned}\vec{p} = \frac{d\vec{v}}{dt} = & -[2b \sin(\frac{1}{2}bt^2) + 2b^2t^2 \cos(\frac{1}{2}bt^2)]\vec{i} \\ & + [2b \cos(\frac{1}{2}bt^2) - 2b^2t^2 \sin(\frac{1}{2}bt^2)]\vec{j} .\end{aligned}\quad (41)$$

Prędkość i przyspieszenie w opisie ruchu w układzie współrzędnych prostokątnych

Do opisu ruchu punktu wygodne jest użycie prostokątnego układu współrzędnych – jest to najczęściej stosowany sposób określenia położenia punktu czy układu złożonego z punktów.



Rys.14. Określenie prędkości punktu za pomocą współrzędnych prostokątnych

Przyjęcie początku układu współrzędnych w punkcie O i oznaczenie współrzędnych punktu A jako (x, y, z) pozwala na zapisanie wektora $\vec{r}$ w postaci

$$\vec{r} = x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k} \quad (42)$$

Różniczkując (42) względem czasu, otrzymujemy

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v} = \frac{dx}{dt} \vec{i} + x \frac{d\vec{i}}{dt} + \frac{dy}{dt} \vec{j} + y \frac{d\vec{j}}{dt} + \frac{dz}{dt} \vec{k} + z \frac{d\vec{k}}{dt} \quad (43)$$

W przypadku, gdy układ współrzędnych jest nieruchomy

$$\frac{d\vec{i}}{dt} = \frac{d\vec{j}}{dt} = \frac{d\vec{k}}{dt} = 0 \quad (44)$$

Zatem

$$\vec{v} = \frac{dx}{dt} \vec{i} + \frac{dy}{dt} \vec{j} + \frac{dz}{dt} \vec{k} \quad (45)$$

Wprowadzając oznaczenia:

$$v_x \equiv \frac{dx}{dt} \equiv \dot{x}, \quad v_y \equiv \frac{dy}{dt} \equiv \dot{y}, \quad v_z \equiv \frac{dz}{dt} \equiv \dot{z} \quad (46)$$

prędkość punktu możemy przedstawić jako:

$$\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k} \quad (47)$$



Wartość bezwzględna (długość wektora) prędkości określa się na podstawie rzutów wektora $\vec{v}$ jako

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \quad (47)$$

Kierunki jakie tworzy wektor $\vec{v}$ z osiami układu współrzędnych xyz określone są za pomocą cosinusów:

$$\cos \alpha_v = \frac{v_x}{v}, \quad \cos \beta_v = \frac{v_y}{v}, \quad \cos \gamma_v = \frac{v_z}{v} \quad (48)$$

Zmiany wektora prędkości w czasie – to jest przyspieszenie punktu – określa pochodna wektora prędkości. Dla układu odniesienia poruszającego się ruchem postępowym (bądź nieruchomego układu odniesienia) otrzymuje się

$$\vec{p} = \frac{d\vec{v}}{dt} = p_x \vec{i} + p_y \vec{j} + p_z \vec{k} \quad (49)$$

przy czym:

$$p_x \equiv \frac{dv_x}{dt} \equiv \ddot{x}, \quad p_y \equiv \frac{dv_y}{dt} \equiv \ddot{y}, \quad p_z \equiv \frac{dv_z}{dt} \equiv \ddot{z} \quad (50)$$

Wartość bezwzględna (długość wektora) przyspieszenia określa się na podstawie rzutów wektora $\vec{p}$ jako

$$p = \sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2} \quad (51)$$

Kierunki jakie tworzy wektor $\vec{p}$ z osiami układu współrzędnych xyz określone są za pomocą cosinusów:

$$\cos \alpha_p = \frac{p_x}{p}, \quad \cos \beta_p = \frac{p_y}{p}, \quad \cos \gamma_p = \frac{p_z}{p} \quad (52)$$



PRZYKŁAD 3

Ruch punktu jest opisany równaniami:

$$\begin{cases} x = a \cos\left(\frac{1}{2}bt^2\right) \\ y = a \sin\left(\frac{1}{2}bt^2\right) \\ z = 0, \end{cases}$$

Określić równanie toru punktu. Wyznaczyć prędkość i przyspieszenie tego punktu

Równanie toru otrzymuje się, eliminując czas t z równań ruchu.

$$x^2 + y^2 = a^2 \left[\cos^2\left(\frac{1}{2}bt^2\right) + \sin^2\left(\frac{1}{2}bt^2\right) \right] = a^2$$

Ponieważ znane są równania ruchu punktu we współrzędnych prostokątnych, to prędkość wyznacza się jako

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \left[-a \sin\left(\frac{1}{2}bt^2\right) \right] \frac{1}{2}b \cdot 2t = -abt \sin\left(\frac{1}{2}bt^2\right)$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \left[a \cos\left(\frac{1}{2}bt^2\right) \right] \frac{1}{2}b \cdot 2t = abt \cos\left(\frac{1}{2}bt^2\right)$$

$$v_z = 0$$

A następnie:

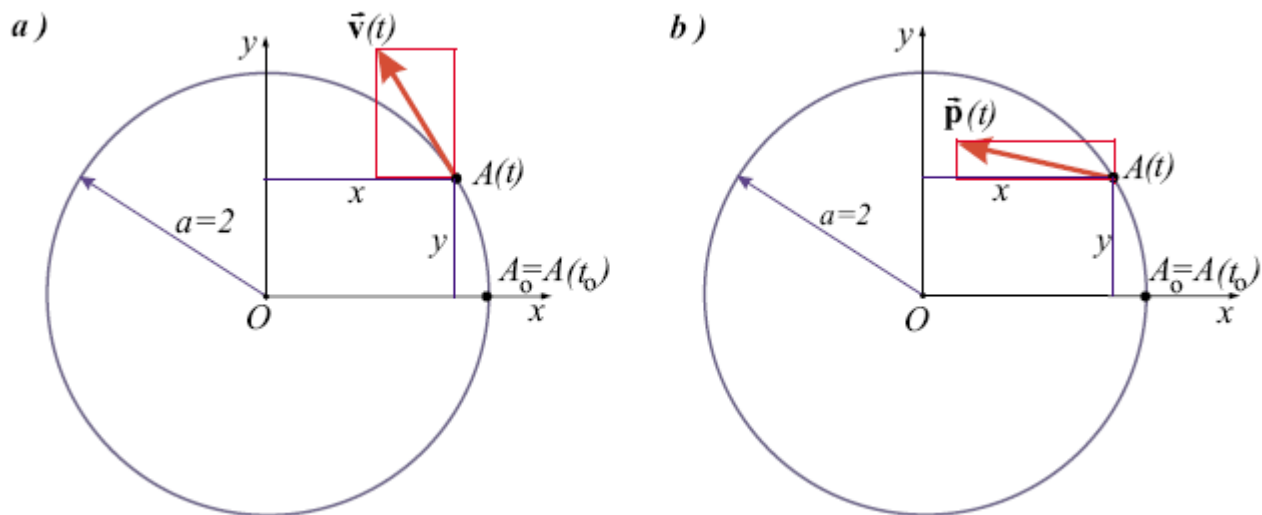
$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{a^2 b^2 t^2 \left[\sin^2\left(\frac{1}{2}bt^2\right) + \cos^2\left(\frac{1}{2}bt^2\right) \right]} = abt$$

Analogiczne postępowanie w przypadku przyspieszenia punktu prowadzi do wyników:

$$p_x = \frac{dv_x}{dt} = -ab \sin\left(\frac{1}{2}bt^2\right) - ab^2t^2 \cos\left(\frac{1}{2}bt^2\right)$$

$$p_y = \frac{dv_y}{dt} = ab \cos\left(\frac{1}{2}bt^2\right) - ab^2t^2 \sin\left(\frac{1}{2}bt^2\right)$$

$$p_z = 0$$



Rys.15. Wektory prędkości i przyspieszenia punktu oraz ich składowe

Moduł wektora przyspieszenia określamy z zależności:

$$p = \sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2} = ab\sqrt{1 + b^2t^4} = 2b\sqrt{1 + b^2t^4}$$



Literatura:

1. J. Grabski, J. Strzałko, *Wykłady z mechaniki ogólnej*, Politechnika Łódzka, Łódź, 2004.
2. J. Misiak *Mechanika ogólna. T. 1 Statyka i kinematyka*. Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa, 2003.
3. J. Misiak *Mechanika ogólna. T. 2 Dynamika*. Warszawa, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, 2004.
4. J. Leyko *Mechanika ogólna. T. 1 Statyka i kinematyka*. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa, 2001.
5. J. Leyko *Mechanika ogólna. T. 2 Dynamika*. Warszawa, Wydawnictwo Naukowe PWN, 2002.